

Тема 1.

Игра в нормальной форме. Равновесие Нэша.

A - множество игроков.

s^a - стратегии игрока a .

S^a - множество стратегий.

$s^a \in S^a$

Ситуация $s = (s^a, a \in A) \in S = \otimes_{a \in A} S^a$

$u^a(s)$ - функция выигрыша a .

$a \rightarrow \max u^a(s)$

Игра в нормальной форме: $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A \rangle$

Равновесие Нэша: $\{s \in S\} : \forall a \in A s^a \in \text{Arg max}_{i^a \in S} \phi^a(s || i^a)$

$s || i^a$ - набор, в котором всё кроме a совпадает с S , а a есть i^a

Равновесие Нэша - такое, от которого невыгодно отклоняться ни одному из игроков.

Понятие Парето-оптимальной ситуации.

$\Gamma = \langle A, S^a, f^a(s), s \in S, a \in A \rangle$

$\bar{s} \in S$ - Парето-оптимальный набор, если:

$\forall s \neq \bar{s} : \forall a \in A f^a(\bar{s}) \leq f^a(s) \Rightarrow \forall a \in A f^a(\bar{s}) \equiv f^a(s)$

Дилемма заключенного

Приведем пример, который показывает, что равновесие по Нэшу может быть неэффективным с точки зрения интересов игроков.

Пример 9.4. Игра "дилемма заключенного":

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{пр} & \text{нет} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{пр} \\ \text{нет} \end{matrix} & \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}, \quad B = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{пр} & \text{нет} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{пр} \\ \text{нет} \end{matrix} & \begin{pmatrix} -8 & -10 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Описанная в примере 9.4 игра имеет следующую структуру:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \vee & \vee \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_{11} & > & b_{12} \\ & & \\ b_{21} & > & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Упражнение 9.5. Проверить, что при выполнении таких соотношений в игре всегда существует единственное равновесие по Нэшу.

Тема 2.

Теорема о существовании равновесия Нэша.

Пусть S^a - выпуклый компакт, ϕ^a непрерывно на s и квазивогнута по s^a для любого $\forall a \in A$. Тогда $\exists$ равновесие по Нэшу в игре Γ .

Выпуклые, вогнутые, квазивогнутые функции.

Функция $C(V)$ наз. выпуклой (вогнутой), если для $\forall$ двух точек V_1 и V_2 и $\forall$ числа $t \in (0, 1)$ справедливо неравенство: $C(tV_1 + (1 - t)V_2) \leq (\geq) tC(V_1) + (1 - t)C(V_2)$

Функция $h(z)$, определенная на выпуклом множестве Z евклидова пространства, наз. квазивогнутой, если для $\forall$ точек $z', z'' \in Z$ и $\forall$ числа λ выполнено неравенство:

$$h(\lambda z' + (1 - \lambda)z'') \geq \min[h(z'), h(z'')]$$

Тема 3.

Смешанное расширение игры. Теорема существования равновесия Нэша в смешанном расширении.

Смешанное расширение игры

Пусть в игре Γ множества стратегий игроков конечны:
 $S^a = \{1, \dots, m^a\}$, $a \in A$. Стратегии s^a , входящие в S^a , называются чистыми стратегиями игрока a . Смешанная стратегия игрока a определяется как вероятностное распределение $\pi^a = (\pi_1^a, \dots, \pi_{m^a}^a)$, где $\pi_{s^a}^a$ — вероятность выбора чистой стратегии $s^a \in S^a$ в качестве реальной стратегии игрока a . Множество смешанных стратегий игрока a — это симплекс

$$\Pi^a = \{\pi^a = (\pi_1^a, \dots, \pi_{m^a}^a) \mid \sum_{s^a=1}^{m^a} \pi_{s^a}^a = 1, \pi_{s^a}^a \geq 0, s^a = 1, \dots, m^a\}.$$

Для заданного набора смешанных стратегий

$$\pi = (\pi^a, a \in A) \in \Pi = \bigotimes_{a \in A} \Pi^a$$

определим $p(s|\pi) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{a \in A} \pi_{s^a}^a$ — вероятность реализации ситуации

$s = (s^a, a \in A)$. Тогда математическое ожидание выигрыша игрока a будет задаваться функцией $u^a(\pi) = \sum_{s \in S} p(s|\pi) u^a(s)$. Таким образом, смешанное расширение игры Γ в нормальной форме имеет вид

$$\bar{\Gamma} = \langle A, \Pi^a, u^a(\pi), a \in A \rangle.$$

Ситуации равновесия игры $\bar{\Gamma}$ будем называть ситуациями равновесия в смешанных стратегиях игры Γ или смешанными равновесиями по Нэшу.

Каждая функция $u^a(\pi)$, очевидно, непрерывна по π и линейна по π^a при любых фиксированных π^b , $b \in A \setminus \{a\}$. Поэтому из теоремы 12.2 вытекает следующий результат.

Теорема 12.3. В любой игре Γ с конечными множествами стратегий существует смешанное равновесие по Нэшу.

Тема 5.

Определение позиционной игры.

Позиционной игрой с полной информацией называется совокупность:

$G = \langle A, (X, \sigma), u^a(x), x \in T, a \in A; X \setminus T = \cup_{a \in A} X^a \cup X^0, \forall x \in X^0 \exists p(x'|x), x' \in \sigma^{-1}(x) \rangle$, в котором

A - множество игроков

(x, σ) - конечное дерево с начальной вершиной x_0 и множеством T финальных вершин

$R = \{X^a, a \in A, X^0\}$ - разбиение множества $X \setminus T$ на попарно не пересекающиеся подмножества

X^a - множество позиций, в которых делает ход игрок $a \in A$; X^a наз. множеством личных позиций игрока a

X^0 - мн-во позиций, в кот. "делает ход" случай

$u^a : T \rightarrow E^1$ - ф-ция выигрыша игрока a

для $\forall x \in X^0$ заданы вероятности

$p(x'|x) > 0, \sum_{x' \in \sigma^{-1}(x)} p(x'|x) = 1$, перехода из позиции x в позиции $x' \in \sigma^{-1}(x)$

Понятие совершенного игрового подравновесия.

Ситуация $\bar{\mu} = (\bar{\mu}^a, a \in A)$ называется совершенным игровым подравновесием игры G , если для каждой вершины $z \in X$ ситуация $\bar{\mu}_z = (\bar{\mu}_z^a, a \in A)$, где $\bar{\mu}_z^a$ - сужение стратегии $\bar{\mu}^a$ на подигру G_z , является равновесием по Нэшу в игре $\Gamma(G_z)$.

Алгоритм Куна.

Шаг 1. Рассмотрим мн-во Z_1 предфинальных вершин, для кот. все следующие вершины являются финальными.

Для каждой вершины:

1) Если в данной вершине ходит игрок $a \in A (z \in Z_1 \cap X^a)$, то находим его наилучший выбор в этой вершине и доопределяем вектор выигрышей игроков в вершине.

2) Если ходит случай, то приписываем этой вершине среднее значение вектора выигрышей среди возможных альтернатив.

Шаг 2. Для этой игры находим мн-во нефинальных вершин Z_2 , для кот. все последующие вершины в новом дереве явл. финальными:

$Z_2 = \{x | \sigma^{-1} \subset T \cup Z_1\}$. Для каждой вершины x этого мн-ва определяем выборы $\bar{\mu}^a(x)$ при $x \in X^a$ и вектор выигрышей $u(x)$.

Нормальная форма ПИ.

Игра $\Gamma(G) = \langle A, \{\mu^a\}, u^a(\mu), a \in A \rangle$ называется нормальной формой позиционной игры G .

Тема 6.

Игры Γ_1 и Γ_2 .

$$\Gamma_1 = \langle X, \{y\}, F(x, y), G(x, y) \rangle$$

Γ_2 . I игрок перед выбором x имеет полную информацию об y . Он ходит первый и сообщает II игроку стратегии. вида $f : Y \rightarrow X$. Мн-во всех таких стратегий обозначим через $\{f\}$. Схема сообщений в игре $\Gamma_2 : f \rightarrow^2 y \rightarrow^1 x = f(y)$

Решение по Штакельбергу.

Пусть $Y^*(x) = \text{Arg max}_{y \in Y} F(x, y)$ – мн-во наилучших ответов II игрокаб благожелательных по отношению к первому.

Ситуация (x^0, y^0) наз. равновесием по Штакельбергу, если

$$x^0 \in \text{Arg max}_{x \in X} \max_{y \in Y(x)} F(x, y), y^0 \in Y^*(x^0).$$

II игрок, получив информацию о x , использует свой наилучший ответ, благожелательный по отношению к I игроку.

Тема 8.

Динамика наилучших ответов.

Выбор игроками произвольных стратегий $s^a(1), a \in A$. Далее после t шагов на следующем, $(t+1)$ -м шаге

$$s^a(t+1) \in \operatorname{Arg} \max_{s^a \in S^a} u^a(s(t) || s^a), a \in A$$

Т.о. игрок максимизирует собственный выигрыш, исходя из предположения, что другие игроки не меняют своих стратегий по сравнению с предыдущим шагом.

Тема 9.

Модель конкурентного рынка одного товара.

На рынке складывается единая цена p на товар и ни один производитель или потребитель не может повлиять на неё индивидуальными действиями, т.е. каждый агент приспособляется к рыночной цене p .

A - мн-во предприятий, поставляющих товар на рынок.

Предприятие $a \in A$ характеризуется max объемом выпуска V^a и удельной себестоимостью продукта c^a .

Стратегией предприятия является объем выпуска V .

Функция предложения.

$S^a(p)$ - указывает оптимальный объем производства в зависимости от цены.

Функция себестоимости.

$C^a(V)$.

$$S^a(p) = \text{Arg max}_{V \geq 0} (pV - C^a(V))$$

Функция спроса.

$B^b(p)$ указывает, какой объем товара готов купить потребитель b по цене p .

Принцип конкурентного равновесия.

На рынке устанавливается цена $\tilde{p}$, кот. балансирует спрос и предложение на товар и наз. ценой конкурентного равновесия.

$D(\tilde{p}) \cap S(\tilde{p}) \neq \emptyset$, где $S(p)$ – ф-ция суммарного предложения, $D(p)$ – ф-ция суммарного спроса.

Тема 10.

Задача об оптимальной стратегии монополии. Эластичность и медленное убывание спроса.

Поиск оптимальной стратегии монополии

Какую цену на товар p^* и объем производства V^* ей следует выбрать, чтобы максимизировать свою прибыль. Формально эта задача записывается в виде:

$$(p^*, V^*) \rightarrow \max_{(p, V); p \geq 0, 0 \leq V \leq D(p)} (pV - C(V))$$

Этап 1. Оптимизация по объему при фиксированной цене. Для монополизированного рынка можно ввести функцию предложения $S(p) = \operatorname{Argmax}_{V \geq 0} (pV - C(V))$ и найти равновесную цену $\tilde{p}$, такую, что $S(\tilde{p}) \cap D(\tilde{p}) \neq \emptyset$.

Теорема 4.1. Если равновесная цена, то

$$V^*(p) = \begin{cases} S(p), & \text{если } p < \tilde{p}, \\ S(p) \cap [0, D^+(p)], & \text{если } p = \tilde{p}, \\ D^+(p), & \text{если } p > \tilde{p}. \end{cases}$$

Этап 2. Оптимизация по цене.

Теорема 4.2.

- 1) Монополия всегда назначает цену p^* не ниже равновесной, т.е. $p^* \geq \tilde{p}$
- 2) Если функция спроса $D(p)$ однозначная и дифференцируемая в окрестности точки $\tilde{p}$, то монополия назначает цену p^* выше равновесной, т.е. $p^* > \tilde{p}$.

Определение. Функция спроса $D(p)$ называется *медленно убывающей* на отрезке $[p_1, p_2]$, если $p_2 D(p_2) \geq p D(p) \quad \forall p \in [p_1, p_2]$, т.е. спрос в денежном выражении $pD(p)$ достигает максимума в точке p_2 .

Определение. Для гладкой функции спроса $D(p)$ *эластичностью* называется величина

$$\epsilon(D(p)) = \frac{|\dot{D}(p)|}{D(p)} p = \frac{|dD(p)/D(p)|}{dp/p}.$$

Она показывает, на сколько процентов изменится объем спроса при изменении цены на один процент.

Тема 12. Основные виды налогов (с продаж, с прибыли, акцизы, НДС). Их влияние на функцию предложения и равновесие.

Налог на добавленную стоимость (НДС)

Когда рассчитывается налог на прибыль, то из выручки от продажи вычитаются все издержки. НДС отличается тем, что при расчете базы налогообложения вычитаются не все издержки. Рассмотрим подробнее структуру издержек предприятия. Их можно представить в виде $C(V) = C_1(V) + C_2(V)$, где $C_1(V)$ — это расходы на приобретения сырья и прочих необходимых для производства товаров, выпущенных другими производителями, а $C_2(V)$ — это внутренние затраты на данном предприятии, прежде всего — заработная плата (а также некоторые другие виды издержек, в частности, расходы на рекламу).

Когда рассчитывается база НДС, из *выручки* pV вычитаются издержки первого типа $C_1(V)$. Это гарантирует, что каждый произведенный в экономике товар облагается НДС только один раз. Величина НДС равна $t_{VAT}(pV - C_1(V))$, где $t_{VAT} \in [0, 1]$ — ставка НДС. При этом прибыль предприятия составляет

$$\begin{aligned} Pr^a(p, V, t_{VAT}) &= pV - C(V) - t_{VAT}(pV - C_1(V)) = \\ &= (1 - t_{VAT})(pV - C_1(V)) - C_2(V). \end{aligned}$$

НДС занимает промежуточное положение между налогом с продаж и налогом на прибыль. Он оказывает определенное влияние на функцию предложения, снижая ее, но какое именно — зависит от соотношения $C_1(V)$ и $C_2(V)$.

Налог с продаж

Налог с продаж взимается с товаров, которые продаются конечному потребителю. Налог с продаж характеризуется ставкой $t_s \in [0, 1]$, показывающей, какая часть стоимости товара должна поступать в государственный бюджет. Посмотрим как налог с продаж влияет на функции прибыли и предложения.

Без налога с продаж

$$\begin{aligned} Pr^a(p, V) &= pV - C(V) - \text{функция прибыли,} \\ S^a(p) &= \operatorname{Arg} \max_{V \geq 0} Pr^a(p, V) - \text{функция предложения.} \end{aligned}$$

С налогом с продаж функции прибыли и предложения равны

$$Pr^a(p, V, t_s) = (1 - t_s)pV - C(V),$$

$$S^a(p, t_s) = \text{Arg max}_{V \geq 0} Pr^a(p, V, t_s) = S^a(p(1 - t_s)).$$

Отсюда следует, что график функции предложения растягивается в по оси p в $1/(1 - t_s)$ раз (см. рис. 20.1).

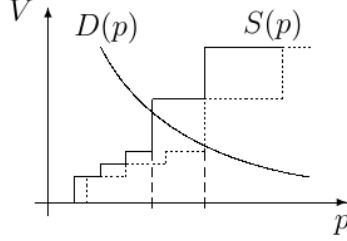


Рис. 20.1

Поскольку функция $S^a(p)$ монотонно не убывает по p , то $S^a(p, t_s) \leq S^a(p)$. То же самое справедливо для совокупной функции предложения отрасли $S(p) = \sum_{a \in A} S^a(p)$, т.е. $S(p, t_s) \leq S(p)$. Если собранные налоги не влияют на функцию спроса, т.е. эти деньги идут на другие нужды, то равновесная цена не убывает по t_s .

Акцизный налог

Акцизный налог берется не с объема выручки, а с каждой единицы товара (сигареты, спиртное и т.п.). Ставка акцизного налога t_e показывает, сколько надо заплатить в бюджет с каждой единицы проданной продукции. Рассмотрим влияние этого налога на функции прибыли и предложения

$$Pr^a(p, V, t_e) = (p - t_e)V - C(V),$$

$$S^a(p, t_e) = \text{Arg max}_{V \geq 0} Pr^a(p, V, t_e) = S^a(p - t_e).$$

Таким образом, график функции предложения смещается вправо на t_e единиц.

Налог на прибыль

Ставка налога на прибыль $t_{pr} \in [0, 1]$ показывает, какая часть прибыли должна поступить в бюджет. Функция прибыли меняется следующим

образом:

$$Pr^a(p, V, t_{pr}) = (1 - t_{pr})(pV - C(V)) = (1 - t_{pr})Pr^a(p, V),$$

а функция предложения останется неизменной:

$$S^a(p, t_{pr}) = \text{Arg max}_{V \geq 0} (1 - t_{pr})Pr^a(p, V) = S^a(p).$$

Тема 14. Оптимальная стратегия проверок в случае честных инспекторов.

Модель налогообложения с двумя уровнями дохода

Рассмотрим модель с двумя возможными уровнями дохода I_L и I_H , где $I_L < I_H$. Налогоплательщики получают низкий и высокий доходы I_L и I_H с вероятностями q и $1 - q$ соответственно. Низкий доход не облагается, а с высокого берется налог T . Таким образом, налогоплательщик с высоким доходом имеет стимул декларировать низкий доход. Чтобы предотвратить такие действия налогоплательщика, налоговая инспекция с вероятностью p проверяет налогоплательщиков, декларирующих низкий доход. Если налогоплательщик с высоким доходом декларирует низкий доход I_L и его декларация проверяется, то факт уклонения от уплаты налога всегда обнаруживается, и налогоплательщик должен выплатить штраф F , включающий неуплаченный налог. Стоимость проверки равна c . Задача руководства налоговой инспекции состоит в том, чтобы найти оптимальную вероятность p проверки деклараций, указывающих низкий доход I_L . При этом максимизируется чистый налоговый сбор R , т.е. все поступления от налогов и штрафов за вычетом затрат на проверки.

Опишем поведение налогоплательщика. Он выбирает свою стратегию из множества $\{I_L, I_H\}$ при получении высокого дохода. Предполагается, что налогоплательщику известна стратегия p налоговой инспекции, и он максимизирует свой ожидаемый доход, сравнивая доход при честном поведении $I_H - T$ и уклонении от налога $I_H - pF$. Таким образом, если вероятность проверки удовлетворяет неравенству $p < \hat{p} \stackrel{\text{def}}{=} T/F$, то все налогоплательщики с высоким доходом уклоняются, и чистый налоговый доход государства в расчете на одного налогоплательщика равен $R(p) = p(qF - c)$. Если $p > \hat{p}$, уклонения не происходит, и доход имеет вид $R(p) = qT - p(1 - q)c$ (рис. 21.1).

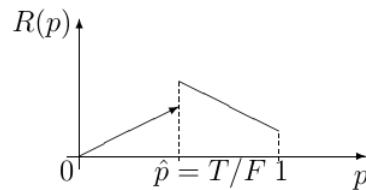


Рис. 21.1

При вероятности проверки $p = \hat{p}$ налогоплательщику безразлично — уклоняться или нет. В этом случае считается, что он не уклоняется. Таким образом, $\hat{p}$ — *пороговая вероятность*, т.е. минимальная вероятность проверки, обеспечивающая честное поведение налогоплательщиков. Отметим, что данная модель является примером иерархической игры Γ_1 , определенной в § 11.

Утверждение 21.1. Оптимальная вероятность проверки $p^* = \hat{p}$, если $qF > (1 - q)c$. При этом максимальный чистый налоговый доход государства R^* положителен и равен $qT - \hat{p}(1 - q)c$. В противном случае $p^* = 0$, $R^* = 0$, т.е. эту группу налогоплательщиков нет смысла проверять.

Упражнение 21.1. Докажите утверждение 21.1.